

Όγδοο διαγώνισμα στις Διαφορικές Εξισώσεις

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 90 λεπτά

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

Θέμα 1

(i) Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''' - y'' - y' + y = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b, \quad y''(0) = c$$

Να δοθεί μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε κάθε λύση του παραπάνω προβλήματος αρχικών τιμών να είναι συγκλίνουσα προς στο 0, όταν το $x \rightarrow +\infty$.

(ii) Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y(x) = b(x), \quad x > 0$$

(a) Με χρήση της αντικατάστασης $u = y\sqrt{x}$ να επιλυθεί η παραπάνω διαφορική εξίσωση.

(b) Αν $b(x) = e^{-x}$, $x \geq 1$ να εξετασθεί αν υπάρχουν μη φραγμένες λύσεις της εξίσωσης στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Θέμα 2

(i) Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$L(y) = y^{(4)} + 2\sqrt{5}y'' + y = 0, \quad x \geq 0.$$

(ii) Για τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$L(y) = xe^{-x}, \quad x \geq 0$$

να εξετάσετε αν υπάρχουν

(a) μη φραγμένες λύσεις

(b) λύσεις y με $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$

Το συμπέρασμα (ii.a) εξακολουθεί να ισχύει για τη διαφορική εξίσωση $L(y) = P(x)e^{-x}$, $x \geq 0$, όπου $P(x)$ ένα πολυώνυμο πέμπτου βαθμού;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ